Quelles lois constitutives pour la modélisation viscoplastique des milieux granulaires ?

F. Bouchut[1]

[1] *LAMA, CNRS & Université Paris-Est-Marne-la-Vallée*

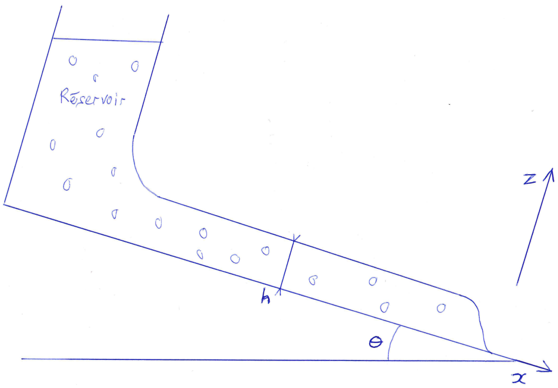
Journées Défis en Géosciences, Paris juin 2019

1. *Ecoulements granulaires de laboratoire et rhéologie* $\mu(I)$
2. *Modèles viscoplastiques incompressibles*
3. *Nécessité de modèles viscoplastiques compressibles*

I. Ecoulements granulaires de laboratoire et rhéologie $\mu(I)$

Matériau granulaire sec (pas de fluide interstitiel)

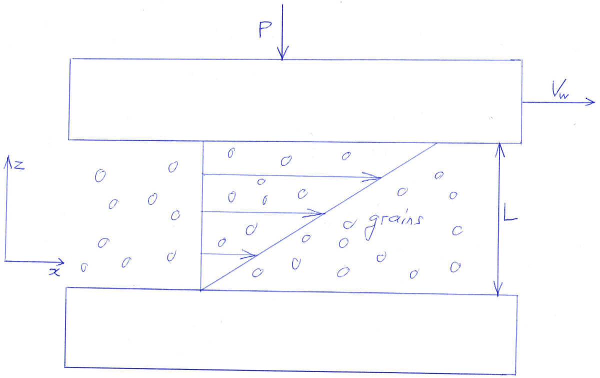
Pouliquen 1999, Pouliquen-Forterre 2002. Lâcher de matériau granulaire (billes de verre) sur un plan incliné d'angle θ.



Pour quels h, θ observe-t-on un écoulement uniforme selon la direction x de l'écoulement ?

▷ Il faut que $h \geq h_{stop}(\theta)$, et $\theta \geq \theta_{min}$.

Andreotti-Forterre-Pouliquen "Les milieux granulaires, entre fluide et solide", 2011, p.232.
On force un écoulement $\mathbf{u} = (u(z), 0)$ avec $u(z)$ linéaire en z.



Pression P imposée sur la plaque supérieure, qui est de plus entrainée à vitesse V_w. La plaque inférieure est fixe. Epaisseur fixée L. Le taux de cisaillement est constant

$$\frac{du}{dz} \equiv \dot{\gamma} = \frac{V_w}{L}.$$

Absence de gravité, donc les équations de l'équilibre donnent $d\sigma_{xz}/dz = 0$, $d\sigma_{zz}/dz = 0$, σ_{xz} et σ_{zz} sont constants, $\sigma_{zz} = -P$, mais la valeur de la contrainte de cisaillement σ_{xz} reste à déterminer.

▷ On suppose les grains très rigides

▷ On suppose $L/d >> 1$, où d est le diamètre des grains.

▷ Il reste 4 paramètres indépendants d, ρ, $\dot{\gamma}$, P, qui impliquent uniquement 3 dimensions : longueur, masse, temps.

▷ On en déduit (théorème Π, Barenblatt 1996) que le système est contrôlé par un unique nombre sans dimension

$$\boxed{I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}.}$$

C'est le nombre inertiel.

▷ En particulier il existe des relations ne dépendant que du matériau

$$\boxed{\frac{\sigma_{xz}}{-\sigma_{zz}} = \mu(I), \qquad \phi = \phi(I).}$$

▷ Interprétation :

$$I = \frac{t_{micro}}{t_{macro}}, \qquad t_{micro} = \frac{d}{\sqrt{P/\rho}}, \qquad t_{macro} = 1/\dot{\gamma}.$$

t_{micro} est le temps caractéristique de réarrangement entre les grains.
t_{macro} est le temps caractéristique de déformation macroscopique du matériau.
Le nombre I caractérise la dynamique du matériau granulaire :

$I < 10^{-3}$	$10^{-3} < I < 10^{-1}$	$10^{-1} < I$
solide/quasistatique	liquide	gaz

▷ Si on suppose que les relations rhéologiques

$$\boxed{\frac{\sigma_{xz}}{-\sigma_{zz}} = \mu(I), \qquad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}}$$

sont toujours vraies localement (c'est ce qu'on appelle la rhéologie $\mu(I)$) et qu'on les applique aux écoulements uniformes sous gravité, on a les valeurs moyennes $\bar{P} = \rho\phi g \cos\theta h/2$, $\bar{u} \simeq \dot{\gamma} h/2$, on retrouve que μ ne dépend que de $\bar{u} d/h\sqrt{gh}$.

▷ Si on applique cette rhéologie sur l'écoulement uniforme sous gravité sans intégrer en z on trouve $\mu(I) = -\sigma_{xz}/\sigma_{zz} = \tan\theta$ donc

$$I = \mu^{-1}(\tan\theta)$$

est indépendant de z. Avec la relation $-\sigma_{zz} = P = \rho\phi g \cos\theta(h - z)$ et $\dot{\gamma} = du/dz$ on trouve

$$\frac{du}{dz} = \frac{I}{d}\sqrt{\phi g \cos\theta(h - z)},$$

$$\boxed{\frac{u(z)}{\sqrt{gd}} = \frac{2}{3} I \sqrt{\phi \cos\theta}\, \frac{h^{3/2} - (h-z)^{3/2}}{d^{3/2}}.}$$

C'est le profil de Bagnold.

▷ Une forme reconnue pour μ est

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + I_0/I},$$

avec $0 < \mu_s < \mu_2$, et $I_0 \sim 0.3$. Donc $\mu(I)$ varie entre deux valeurs μ_s et μ_2. Pour inverser la relation et trouver $I = \mu^{-1}(\tan\theta)$ il faut donc

$$\mu_s < \tan\theta < \mu_2.$$

C'est la condition pour laquelle le modèle analytique avec la rhéologie locale admet des écoulements stationnaires uniformes.

▷ Cette théorie donne donc $\theta_{stop}(h) = \mu_s$ indépendant de h, ce qui ne correspond pas aux expériences !

II. Modèles viscoplastiques incompressibles

▷ On part d'une modélisation dynamique classique

$$\boxed{\rho\phi(\partial_t u + u\cdot\nabla u) - \operatorname{div}\sigma = \phi f,}$$

avec σ le tenseur des contraintes (matrice symétrique). On peut décomposer

$$\boxed{\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma', \qquad \operatorname{tr}\sigma' = 0,}$$

avec p la pression (effective), et σ' le déviateur des contraintes, noté parfois τ.

▷ Pour un modèle incompressible on a

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad \phi = cste,$$

et σ' est à définir. p est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte $\operatorname{div} u = 0$.

▷ Pour un modèle compressible on a

$$\partial_t\phi + \operatorname{div}(\phi u) = 0,$$

et σ (ou de façon équivalente p et σ') est à définir.

▷ Un modèle newtonien incompressible est

$$\sigma' = 2\eta Du,$$

avec $Du = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$ le taux de déformation, et $\eta = \eta(\phi)$ la viscosité.

▷ Un modèle newtonien compressible est

$$\sigma = -p_0(\phi)\,\mathrm{Id} + 2\eta Du + \lambda\,\mathrm{Id}\operatorname{div} u,$$

où $p_0(\phi)$ est la pression thermodynamique, $\eta(\phi)$ et $\lambda(\phi)$ les coefficients de viscosité.

▷ Un modèle viscoplastique est défini par une rhéologie de la forme

$$\boxed{\sigma \text{ fonction de } \phi,\ Du \quad \text{(compressible)},}$$

$$\boxed{\sigma' \text{ fonction de } \phi, Du,\ \text{éventuellement } p, \quad \text{(incompressible)}.}$$

▷ Dans les écoulements de laboratoire présentés on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(u(z), 0) = 0$. Cela amène naturellement à une modélisation dynamique incompressible.

▷ On considère maintenant le modèle incompressible défini par la rhéologie $\mu(I)$ locale :

$$\boxed{\sigma' = \mu(I) p \frac{Du}{|Du|},}$$

avec $|Du|^2 = (\sum_{ij} Du_{ij}^2)^{1/2}$ et

$$\boxed{I = \frac{2d|Du|}{\sqrt{p/\rho}}.}$$

C'est la généralisation tensorielle du modèle à cisaillement simple puisque $|\sigma'| = \mu(I)p$.

▷ Le gros problème de la rhéologie incompressible $\sigma' = 2\eta Du$ où η dépend de p est qu'elle est en général mal posée !
▷ Pour la rhéologie $\mu(I)$ incompressible, Barker et al. 2015 ont montré si on prend une solution de référence régulière et qu'on fait une perturbation locale à nombre d'onde très grand, le problème linéarisé est mal posé (de type chaleur rétrograde), ceci pour une large plage de valeurs de I (pour I petit et pour I grand).
▷ Lorsqu'on raffine dans les simulations numériques, on voit apparaitre des "bandes de cisaillement", qui deviennent d'autant plus fines que le maillage est fin (Martin & al. 2017).

▷ La rhéologie $\mu(I)$ a les bonnes échelles physiques, mais pas la bonne structure algébrico-différentielle.

▷ Peut-il y avoir une formulation variationnelle pour un problème incompressible ?
▷ Une façon d'en écrire une est

$$\boxed{\alpha u - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0,}$$

avec $\alpha > 0$ et une rhéologie

$$\boxed{\sigma' \in \partial F(Du),}$$

où la non-linéarité est

$$F : \mathbb{M}^{s0}_{N\times N}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ convexe sci non identiquement } \infty.$$

▷ De façon explicite, F est définie sur l'espace des matrices symétriques $N \times N$ de trace nulle. Le sous-différentiel est défini par

$$\partial F(D') = \left\{\sigma' \text{tels que } \forall A \; F(A) \geq F(D') + \sigma' : (A - D')\right\}.$$

Ici, ":" représente le produit scalaire des matrices.
▷ Le problème est alors bien posé et on a de bonnes méthodes d'approximation numérique.

▷ Exemple : Bingham

$$\boxed{F(D') = \kappa |D'|.}$$

On a alors

$$\partial F(D') = \begin{cases} \kappa \dfrac{D'}{|D'|} & \text{si } D' \neq 0, \\ \overline{B}_{M^{s0}}(0, \kappa) & \text{si } D' = 0. \end{cases}$$

κ est le seuil de contraintes. Lorsqu'on a la relation $\sigma' \in \partial F(Du)$,

- $|\sigma'| \leq \kappa \to Du$ peut être nul,
- $|\sigma'| > \kappa \to Du$ doit être non nul.

Le fluide peut être à l'arrêt (ou plus généralement avoir $Du = 0$ ie un mouvement solide) avec des contraintes σ' non nulles (c'est le cas pour les écoulements uniformes si $\theta < \theta_{min}$). C'est un fluide à seuil.

▷ Example : Herschel-Bulkley

$$\boxed{F(D') = \tfrac{K}{1+n} |D'|^{1+n} + \kappa |D'|.}$$

▷ F n'est pas différentiable à l'origine, cela permet au matériau de pouvoir se comporter comme un solide (contraintes sous le seuil) ou comme un liquide/gaz (contraintes au dessus du seuil).

▷ Condition de dissipation

$$\boxed{\partial F(0) \ni 0.}$$

Propriété de monotonie du sous-différentiel des fonctions convexes :

$$\sigma_1 \in \partial F(D_1),\ \sigma_2 \in \partial F(D_2) \Rightarrow (\sigma_2 - \sigma_1) : (D_2 - D_1) \geq 0.$$

En particulier la condition de dissipation implique

$$\sigma \in \partial F(Du) \Longrightarrow \sigma : Du \geq 0,$$

et la dissipation d'énergie est bien positive,

il y a consistence thermodynamique

▷ Peut-on mettre la loi $\mu(I)$ sous la bonne forme $\sigma \in \partial F(Du)$ avec F convexe ?

Non, les échelles imposées empêchent la convexité,

et plus généralement empêchent la propriété de monotonie écrire ci-dessus.

III. Nécessité de modèles viscoplastiques compressibles pour les matériaux granulaires

▷ Barker & al. 2017, Heyman & al. 2017 : un modèle "$\mu(I)$ compressible" peut être bien posé linéairement, contrairement au cas incompressible.
▷ Bouchut & al. 2016 : pour avoir les effets de dilatance il faut un modèle compressible.
▷ Essai de modélisation compressible (sans élasticité)

$$\boxed{\begin{gathered}\partial_t \phi + \operatorname{div}(\phi u) = 0,\\ \rho\phi(\partial_t u + u\cdot\nabla u) = \operatorname{div}\sigma + \phi f,\end{gathered}}$$

avec ϕ fraction volumique, u vitesse, ρ masse volumique (constante).
▷ Loi rhéologique

$$\boxed{\sigma \in \partial\Psi(\phi, s, Du),}$$

avec $\Psi(\phi, s, D)$ potentiel viscoplastique, convexe par rapport à D (D est aussi souvent noté $D = \dot{\epsilon}$). Le sous-différentiel est pris par rapport à D.
▷ Compatibilité thermodynamique

$$\boxed{\partial\Psi(\phi, s, 0) \ni -p_0(\phi, s)\,\mathrm{Id},}$$

où $p_0(\phi, s)$ est la loi de pression qui vérifie une identité thermodynamique

$$de_0 = -\frac{p_0}{\rho} d\left(\frac{1}{\phi}\right) + Tds,$$

où $e_0(\phi, s)$ est l'énergie spécifique, $T(\phi, s) > 0$ la température.
▷ On peut écrire $\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma'$, $\mathrm{tr}(\sigma') = 0$. p est la pression effective, qu'on mesure.

▷ On complète les deux équations de conservation de masse et quantité de mouvement par une équation d'énergie

$$\boxed{\partial_t(\rho\phi\frac{|u|^2}{2} + \rho\phi e_0) + \mathrm{div}(\rho\phi\frac{|u|^2}{2}u + \rho\phi e_0 u) = \mathrm{div}(\sigma u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla T) + \phi f \cdot u.}$$

▷ Des trois lois de conservation on déduit l'identité d'entropie

$$\boxed{\partial_t(\rho\phi s) + \mathrm{div}(\rho\phi s u) - \frac{1}{T}(\sigma : Du + p_0\,\mathrm{tr}(Du)) - \mathrm{div}\left(\kappa\frac{\nabla T}{T}\right) - \kappa\frac{|\nabla T|^2}{T^2} = 0.}$$

La compatibilité thermodynamique implique

$$\sigma : Du + (p_0\,\mathrm{Id}) : Du \geq 0,$$

donc l'équation d'entropie a un terme source signé.

▷ Invariance par changement de référentiel : $\Psi(\phi, s, D)$ ne dépend que de ϕ, s et de $\mathrm{tr}(D^k)$, $k = 1, \ldots, N$. On peut décomposer

$$D = \frac{\mathrm{tr}(D)}{N}\,\mathrm{Id} + D', \qquad \mathrm{tr}(D') = 0.$$

C'est une décomposition orthogonale car $0 = tr(D') = D' : \mathrm{Id}$. Alors
$\mathrm{tr}(D^2) = |D|^2 = |D'|^2 + \mathrm{tr}(D)^2/N$.

Donc en 2d Ψ ne dépend que de $\mathrm{tr}(D)$ et de $|D'|$.

En 3d Ψ peut en plus dépendre de $\det(D)$.

▷ Exemple : fluide newtonien

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s)\,\mathrm{tr}\,D + \eta(\phi, s)\frac{|D|^2}{2} + \lambda(\phi, s)\frac{(\mathrm{tr}\,D)^2}{2}.$$

On a $\partial\Psi(\phi, s, 0) = \{-p_0(\phi, s)\,\mathrm{Id}\}$, la compatibilité thermodynamique est vérifiée.

▷ Une loi est "purement plastique" (ie sans viscosité) si Ψ est homogène de degré 1, ie

$$\forall\lambda > 0 \quad \Psi(\lambda D) = \lambda\Psi(D).$$

Alors $\partial\Psi$ est homogène de degré 0, donc la loi $\sigma \in \partial\Psi(\phi, s, D)$ ne dépend (pour $D \neq 0$) que de $D/|D|$, et pas de $|D|$. On dit aussi qu'elle est "rate independent".

▷ Exemple de loi purement plastique :

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s)\,\mathrm{tr}(D) + \mu_s p_0(\phi, s)|D'|,$$

avec μ_s constant (ou dépendant de ϕ, s).

▷ Exemple : modèle Drucker dilatant (Andreotti-Forterre-Pouliquen p.158)

$$\Psi = p_0 \left(\sin\psi\,|D'| - \mathrm{tr}(D)\right)_+ .$$

Alors pour $D' \neq 0$

$$\partial_D \Psi = p_0 \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\,|D'|} \left(\sin\psi\,\frac{D'}{|D'|} - \mathrm{Id}\right),$$

donc

$$p = p_0 \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\,|D'|}, \qquad \sigma' = p_0 \sin\psi \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\,|D'|} \frac{D'}{|D'|} = \sin\psi\,p \frac{D'}{|D'|}.$$

On retrouve une loi de type Drucker-Prager (compressible), mais avec $\sin\psi$ constant (pas de viscosité). On remarque que p est toujours positif ou nul (c'est le cas dans tous les modèles écrits ici). On a

$$\partial\Psi(0) = \{\sigma \mid \sigma = p_0\alpha(\sin\psi\,V - \mathrm{Id}), \quad \text{avec } |V| \leq 1,\ \mathrm{tr}(V) = 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1\} .$$

On a bien la compatibilité thermodynamique $\partial\Psi(0) \ni -p_0\,\mathrm{Id}$.

▷ Les modèles de la théorie cinétique étendue (Jenkins et al.) donnent des formules (compliquées) pour σ (en termes de ϕ, T, Du). Est-ce qu'elles s'écrivent sous la forme $\partial\Psi$?

▷ Barker et al. 2017 écrivent une loi sous la forme

$$\sigma' = Y(p,\phi,I)\frac{D'}{|D'|}, \qquad \operatorname{div} u \equiv \operatorname{tr}(D) = 2f(p,\phi,I)|D'|,$$

avec toujours $\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma'$ et $\operatorname{tr}(\sigma') = 0$. Ils soutiennent qu'on doit avoir

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{I}{2p}\frac{\partial Y}{\partial I} = f + I\frac{\partial f}{\partial I}.$$

Quel est le sens et l'interprétation de cette relation ?

▷ Exemple : le modèle Cam-Clay

$$\Psi = \frac{p_0}{2} \frac{\sin \delta |D'|}{Y + \sqrt{1 + Y^2}}, \quad \text{avec } Y = \frac{\operatorname{tr}(D)}{|D'| \sin \delta}.$$

Alors on vérifie que p vérifie $0 \leq p \leq p_0$, et p est déterminé par l'équation

$$\frac{\operatorname{tr}(D)}{|D'|} = \frac{1}{2} \sin \delta \frac{p_0/p - 2}{\sqrt{p_0/p - 1}},$$

tandis que σ' est donné par

$$\sigma' = \sin \delta p \sqrt{p_0/p - 1} \frac{D'}{|D'|}.$$

▷ On a un effet de dilatance :

$$tr(D) \geq 0 \text{ pour } p \leq p_0/2, \qquad \operatorname{tr}(D) \leq 0 \text{ pour } p \geq p_0/2.$$

On dit que $p_0/2$ est la pression critique (et rappelons que $p_0 = p_0(\phi, s)$).

▷ C'est encore un modèle purement plastique (sans viscosité).

▷ Dilatance pour une loi générale. Pour une loi générale Ψ, par la relation $\sigma \in \partial\Psi(D)$, décomposant $D = (\operatorname{tr} D, D')$ on déduit (là où Ψ est différentiable) les lois $p(\operatorname{tr} D, D')$ et $\sigma'(\operatorname{tr} D, D')$. On peut alors définir

$$p_c(D') = -p(\operatorname{tr} D = 0, D').$$

Comme Ψ est convexe, $p = -\partial\Psi/\partial(\operatorname{tr} D)$ est décroissante par rapport à $\operatorname{tr} D$. On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{div} u = \operatorname{tr} D > 0 \Leftrightarrow p < p_c(D'), \\ \operatorname{tr} D < 0 \Leftrightarrow p > p_c(D'). \end{array}}$$

Les modèles purement plastiques. Pour les modèles purement plastiques (Ψ homogène de degré 1), on a des propriétés particulières.

▷ En chaque D pour lequel Ψ est différentiable en D, $\sigma = \partial_D \Psi$ ne dépend que de $D/|D|$, il reste donc dans une sous-variété de codimension 1.

▷ En chaque D pour lequel Ψ est différentiable en D, une petite variation δD de D induit une variation $\delta\sigma$ de σ, qui vérifie

$$\delta\sigma : D = 0.$$

On dit que la rhéologie est "associée". La déformation est normale à la variété où vit σ.

▷ La démonstration est la suivante. Ψ est homogène de degré 1

$$\Psi(\lambda D) = \lambda \Psi(D).$$

Dérivant par rapport à D on trouve

$$\partial_D \Psi(\lambda D) = \partial_D \Psi(D),$$

ie $\partial_D \Psi$ est homogène de degré 0. Dérivant ensuite par rapport à λ on trouve

$$\partial^2_{DD} \Psi(\lambda D) D = 0.$$

Prenant $\lambda = 1$ et notant que $\partial^2_{DD} \Psi(D) = \delta\sigma$, on obtient le résultat.

Conclusion

▷ Les lois rhéologiques incompressibles sont insuffisantes à la fois pour des raisons de modélisation et des raisons mathématiques

▷ Plusieurs formes de lois rhéologiques compressibles sont proposées dans la littérature.

▷ Il faut trouver la bonne loi qui incorpore autant que possible les échelles de la loi $\mu(I)$!

[1] O. Pouliquen, Scaling laws in granular flows down rough inclined planes, Phys. Fluids 11, 542, 1999, http://dx.doi.org/10.1063/1.869928

[2] O. Pouliquen, Y. Forterre, Friction law for dense granular flows : Application to the motion of a mass down a rough inclined plane, J. Fluid Mech. 453, 133-151, 2002, http://dx.doi.org/10.1017/S0022112001006796

[3] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen, Les milieux granulaires, entre fluide et solide, EDP sciences et CNRS éditions, collection savoirs actuels, 2011.

[4] T. Barker, D.G. Schaeffer, P. Bohorquez, J.M.N.T. Gray, Well-posed and ill-posed behaviour of the $\mu(I)$-rheology for granular flow, J. Fluid Mech. 779, 794-818, 2015, http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2015.412

[5] N. Martin, I.R. Ionescu, A. Mangeney, F. Bouchut, M. Farin, Continuum viscoplastic simulation of a granular column collapse on large slopes : $\mu(I)$ rheology and lateral wall effects, Phys. Fluids 29, 013301, 2017, http://dx.doi.org/10.1063/1.4971320

[6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[7] G. Duvaut and J.-L. Lions, Inequalities in mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wis- senschaften, 219.

[8] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, volume 8 of Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Translated from the French.

[9] R. Temam, Problèmes mathématiques en plasticité, volume 12 of Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.

[10] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer 2008 (reprint from the 1984 edition).

[11] H. Brézis, Monotonicity in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, 101-156, in "Contributions to nonlinear functional analysis", ed. by E. Zarantonello, Academic, New-York, 1971.

[12] M. Fortin, R. Glowinski, Studies in Mathematics and its Applications15(C), 1983.

[13] P. Saramito, N. Roquet, An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 5391-5412, 2001, http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00175-X

[14] D. Bresch, E. D. Fernández-Nieto, I. R. Ionescu, P. Vigneaux, Augmented Lagrangian method and compressible visco-plastic flows : applications to shallow dense avalanches. In New directions in mathematical fluid mechanics, Adv. Math. Fluid Mech., 57-89. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[15] E. D. Fernández-Nieto, J. M. Gallardo, P. Vigneaux, Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. Part 1 : The 1D case. J. Comput. Phys. 264, 55-90, 2014, http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.01.026

[16] P. Saramito, A damped Newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows, J. Non-newtonian fluid mechanics 238, 6-15, 2016, http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2016.05.007

[17] P. Saramito, A. Wachs, Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows, Rheologica Acta 56, 211-230, 2017, http://dx.doi.org/10.1007/s00397-016-0985-9

[18] F. Bouchut, R. Eymard, A. Prignet, Convergence of conforming approximations for inviscid incompressible Bingham fluid flows and related problems, J. Evolution Eq., 14, 635-669, 2014. http://dx.doi.org/10.1007/s00028-014-0231-9

[19] Chambolle, T. Pock, An introduction to continuous optimization for imaging, Acta Numerica, 161-319, 2016, http://dx.doi.org/10.1017/S096249291600009X

[20] A. Chambolle, T. Pock, A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, J. Math. Imaging and Vision 40, 120-145, 2011, http://dx.doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1

[21] E.J. Dean, R. glowinski, G. Guidoboni, On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results, J. Non-newtonian Fluid Mech. 142, 36-62, 2007, http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2006.09.002

[22] L. Chupin, T. Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, Computers and Mathematics with Applications 72, 1263-1286, 2016, http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.026

Références

[23] C. Lusso, A. Ern, F. Bouchut, A. Mangeney, M. Farin, O. Roche, Two-dimensional simulation by regularization of free surface viscoplastic flows with Drucker-Prager yield stress and application to granular collapse, J. Comput. Phys. 333, 387-408, 2017, http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.036

[24] T. Barker, D.G. Schaeffer, M. Shearer, J.M.N.T. Gray, Well-posed continuum equations for granular flow with compressibility and $\mu(I)$ rheology, Proc. Royal Soc. A 473, 20160846, 2017, http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0846

[25] J. Heyman, R. Delannay, H. Tabuteau, A. Valance, Compressibility regularizes the $\mu(I)$-rheology for dense granular flows, preprint 2017.

[26] F. Bouchut, E.D. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, G. Narbona-Reina, A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects, J. Fluid Mech. 801, 166-221, 2016. http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.417