

Modèle de Saint-Venant discrétisé par couches: beaucoup de questions et quelques réponses sur le bicouche

Nina Aguillon (LJLL, INRIA)
Travail en cours dans l'équipe ANGE
Journées Tarantola, 6-7 juin 2019

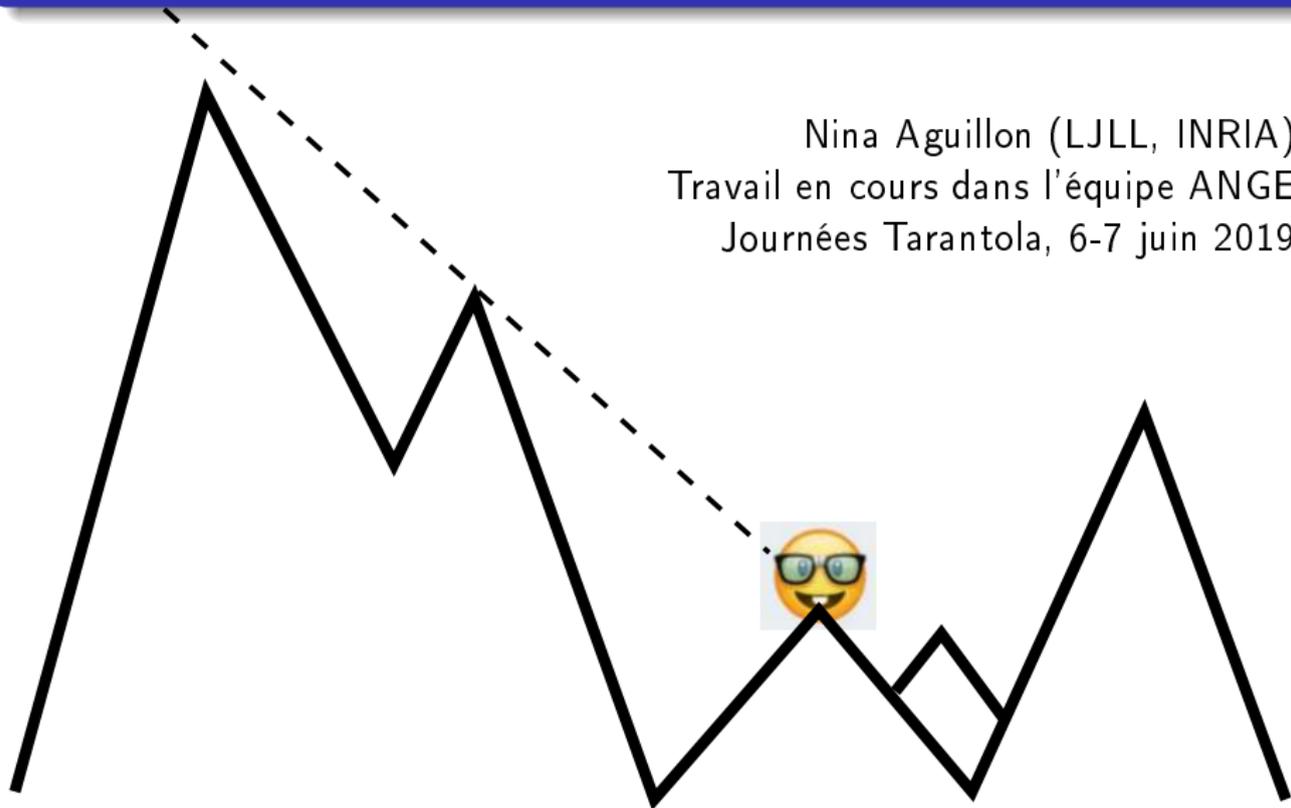
Modèle de Saint-Venant discrétisé par couches: beaucoup de questions et quelques réponses sur le bicouche

Nina Aguillon (LJLL, INRIA)
Travail en cours dans l'équipe ANGE
Journées Tarantola, 6-7 juin 2019



Modèle de Saint-Venant discrétisé par couches: beaucoup de questions et quelques réponses sur le bicouche

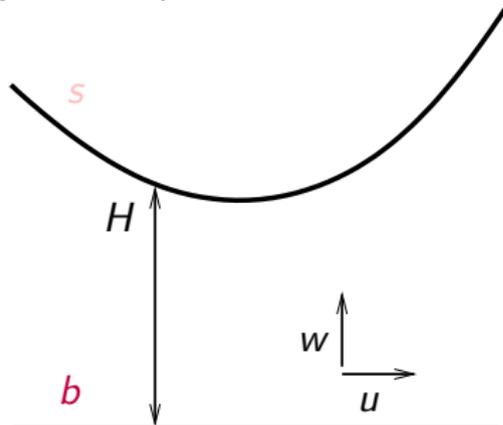
Nina Aguillon (LJLL, INRIA)
Travail en cours dans l'équipe ANGE
Journées Tarantola, 6-7 juin 2019



Introduction

Le modèle de Saint-Venant discrétisé par couches est un modèle intermédiaire entre le modèle d'Euler hydrostatique à surface libre et le modèle de Saint-Venant.

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_x uw + \partial_z p = 0 \\ \partial_z p = -g \\ \partial_t H + u_s \partial_x H - w_s = 0 \\ w_b = 0 \end{cases}$$

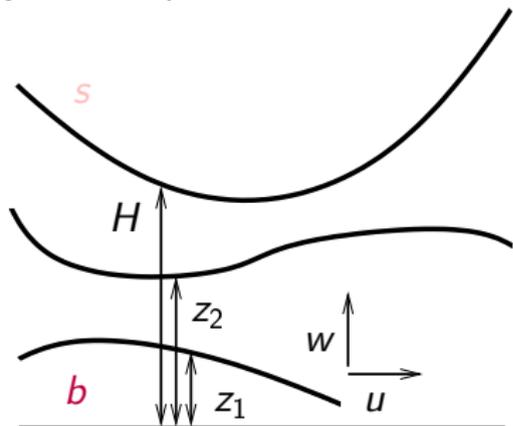


Introduction

Le modèle de Saint-Venant discrétisé par couches est un modèle intermédiaire entre le modèle d'Euler hydrostatique à surface libre et le modèle de Saint-Venant.

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_x u w + \partial_z p = 0 \\ \partial_z p = -g \\ \partial_t H + u_s \partial_x H - w_s = 0 \\ w_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} (\partial_x u + \partial_z w) dz \\ &= \partial_x \int_{z_1}^{z_2} u dz \\ & - u_2 \partial_x z_2 + u_1 \partial_x z_1 \\ & + w_2 - w_1 \end{aligned}$$



Introduction

Le modèle de Saint-Venant discrétisé par couches est un modèle intermédiaire entre le modèle d'Euler hydrostatique à surface libre et le modèle de Saint-Venant.

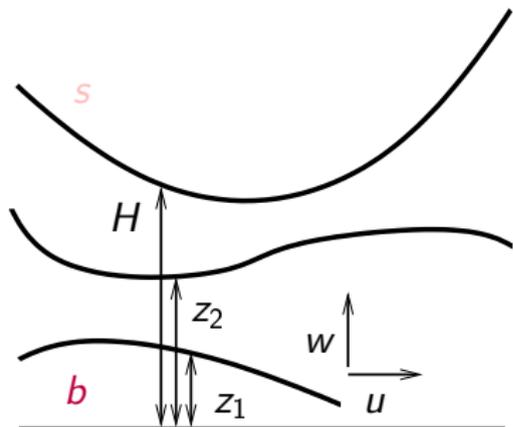
$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_x u w + \partial_z p = 0 \\ \partial_z p = -g \\ \partial_t H + u_s \partial_x H - w_s = 0 \\ w_b = 0 \end{cases}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} (\partial_x u + \partial_z w) dz$$

$$= \partial_x \int_{z_1}^{z_2} u dz + \partial_t (z_2 - z_1)$$

$$+ \partial_t z_1 + u_1 \partial_x z_1 - w_1$$

$$- (\partial_t z_2 + u_2 \partial_x z_2 - w_2)$$



Dans une couche artificielle

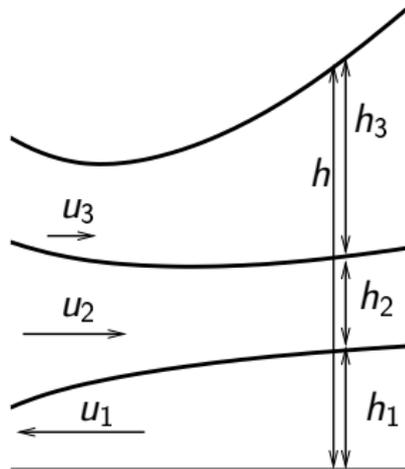
Avec $h = z_2 - z_1$ et $\bar{u} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} u dz$:

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{u}) = G_2 - G_1$$

Choix d'inconnues 1

Pas d'échange, 6 inconnues.

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_1) = 0 \\ \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 u_2) = 0 \\ \partial_t h_3 + \partial_x(h_3 u_3) = 0 \\ \partial_t(h_1 u_1) + \partial_x(h_1 u_1^2) + gh_1 \partial_x h = 0 \\ \partial_t(h_2 u_2) + \partial_x(h_2 u_2^2) + gh_2 \partial_x h = 0 \\ \partial_t(h_3 u_3) + \partial_x(h_3 u_3^2) + gh_3 \partial_x h = 0 \end{cases}$$



- Système non conservatif
- Système non hyperbolique (moins problématique à densité variable)

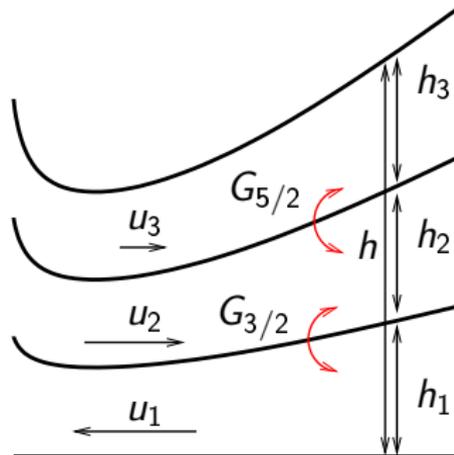


E. Audusse A Multilayer Saint-Venant Model : Derivation and Numerical Validation [Discrete and Continuous Dynamical Model Series B](#)

Choix d'inconnues 2

Avec échanges, $h_1 = h/3$, $h_2 = h/3$, $h_3 = h/3$, 4 inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 u_2) = G_{5/2} - G_{3/2} \\ \partial_t h_3 + \partial_x(h_3 u_3) = -G_{5/2} \\ \partial_t(h_1 u_1) + \partial_x(h_1 u_1^2) + gh_1 \partial_x h = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t(h_2 u_2) + \partial_x(h_2 u_2^2) + gh_2 \partial_x h \\ \quad = u_{5/2} G_{5/2} - u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t(h_3 u_3) + \partial_x(h_3 u_3^2) + gh_3 \partial_x h = -u_{5/2} G_{3/2} \end{array} \right.$$



- Système non conservatif
- Choix des vitesses d'interface.

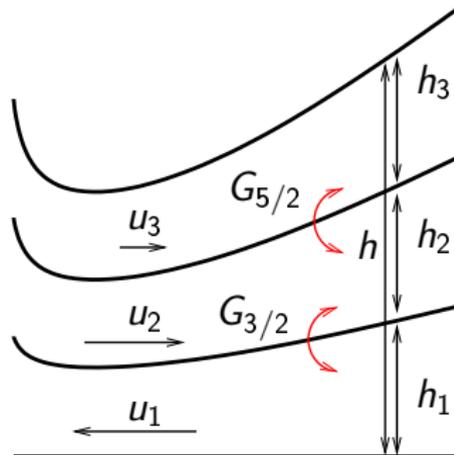


E. Audusse, M.-O. Bristeau, B. Perthame, J. Sainte-Marie A Multilayer Saint-Venant Model with Mass Exchange for Shallow Water Flows. Derivation and Numerical Validation [M2AN](#)

Choix d'inconnues 2

Avec échanges, $h_1 = h/3$, $h_2 = h/3$, $h_3 = h/3$, 4 inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x (h_1 u_1) \\ -G_{5/2} = \partial_t h_3 + \partial_x (h_3 u_3) \\ \partial_t h + \partial_x (h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3) = 0 \\ \partial_t (h_1 u_1) + \partial_x (h_1 u_1^2) + gh_1 \partial_x h = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + gh_2 \partial_x h \\ \quad = u_{5/2} G_{5/2} - u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_3 u_3) + \partial_x (h_3 u_3^2) + gh_3 \partial_x h = -u_{5/2} G_{3/2} \end{array} \right.$$

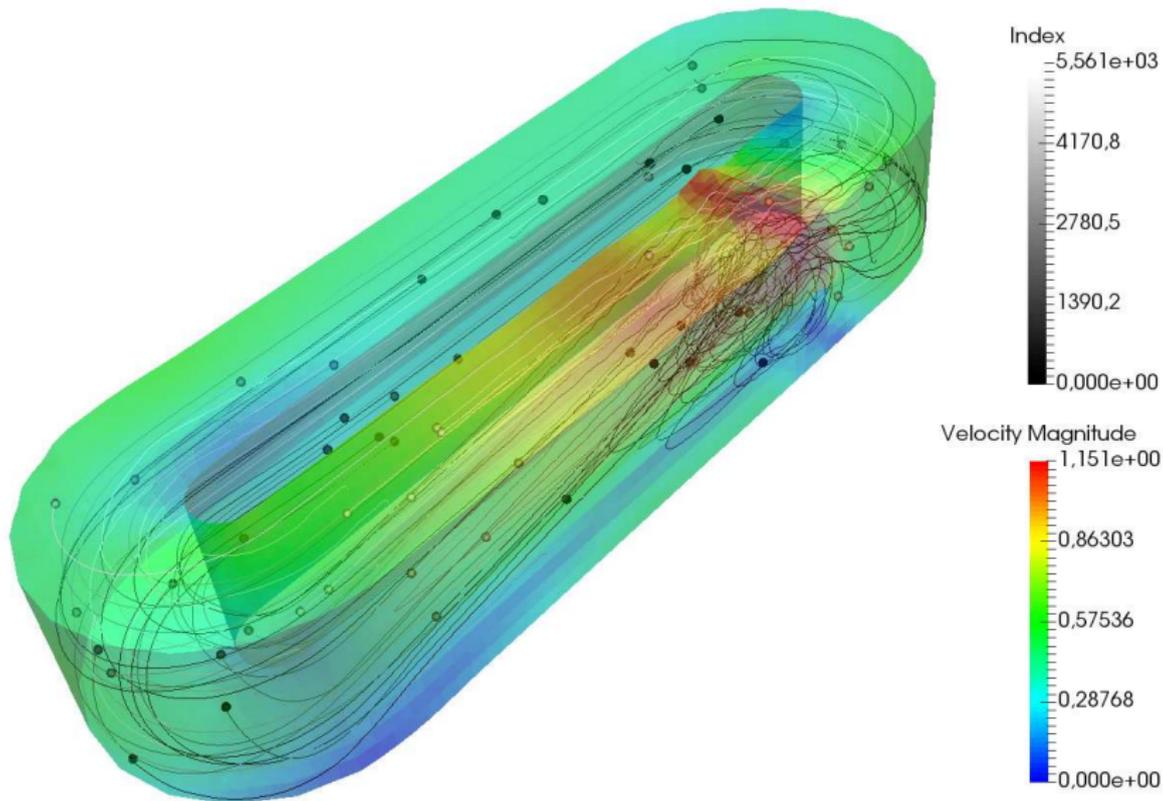


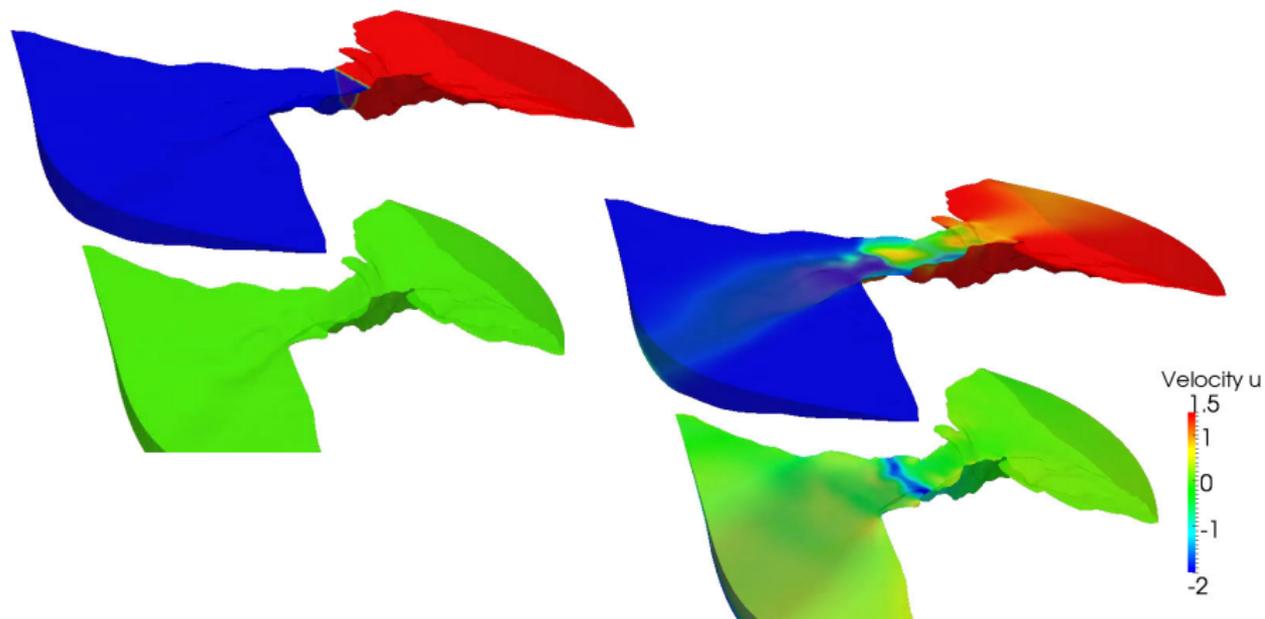
- Système non conservatif
- Choix des vitesses d'interface.



E. Audusse, M.-O. Bristeau, B. Perthame, J. Sainte-Marie A Multilayer Saint-Venant Model with Mass Exchange for Shallow Water Flows. Derivation and Numerical Validation [M2AN](#)

- prendre en compte d'une topographie ;
- écrire un modèle à densité variable ;
- rajouter de la diffusion ;
- s'affranchir de l'hypothèse de pression hydrostatique ;
- obtenir un schéma numérique agréable mathématiquement :
préservation de la positivité, traitement de la topographie et des transitions avec les zones sèches.





- 1 Choix des vitesses d'interface
- 2 Résultats d'hyperbolicité
- 3 Modèle bicouche à interface physique

Et les vitesses d'interface ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ vitesse transverse} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{g}{2} h^2 = 2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{g}{2} h^2 = -2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_1 + \partial_x h u_1 v_1 = 2 v_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_2 + \partial_x h u_2 v_2 = -2 v_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa \text{ transport passif} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{g}{2} h^2 = 2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{g}{2} h^2 = -2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_1 + \partial_x h u_1 \kappa_1 = 2 \kappa_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_2 + \partial_x h u_2 \kappa_2 = -2 \kappa_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \partial_t (gh^2 + hu_1^2 + hu_2^2) + \partial_x(\text{truc}) &= G_{3/2} (u_1 - u_2) (2u_{3/2} - (u_1 + u_2)) \\ \partial_t (hv_1^2 + hv_2^2) + \partial_x(\text{bidule}) &= G_{3/2} (v_1 - v_2) (2v_{3/2} - (v_1 + v_2)) \end{aligned}$$

Et les vitesses d'interface ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ vitesse transverse} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = 2u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = -2u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_1 + \partial_x h u_1 v_1 = 2v_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_2 + \partial_x h u_2 v_2 = -2v_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa \text{ transport passif} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = 2u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = -2u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_1 + \partial_x h u_1 \kappa_1 = 2\kappa_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_2 + \partial_x h u_2 \kappa_2 = -2\kappa_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \partial_t (gh^2 + hu_1^2 + hu_2^2) + \partial_x(\text{truc}) &= G_{3/2}(u_1 - u_2)(2u_{3/2} - (u_1 + u_2)) \\ \partial_t (hv_1^2 + hv_2^2) + \partial_x(\text{bidule}) &= G_{3/2}(v_1 - v_2)(2v_{3/2} - (v_1 + v_2)) \end{aligned}$$

Centré ou décentré ?

$$\bullet_{3/2} = \frac{\bullet_1 + \bullet_2}{2}$$

conservation de l'énergie

Et les vitesses d'interface ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ vitesse transverse} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = 2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = -2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_1 + \partial_x h u_1 v_1 = 2 v_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h v_2 + \partial_x h u_2 v_2 = -2 v_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa \text{ transport passif} \\ G_{3/2} = \partial_t h_1 + \partial_x h_1 u_1 = \partial_x h \frac{u_1 - u_2}{4} \\ \partial_t h + \partial_x h \frac{u_1 + u_2}{2} = 0 \\ \partial_t h u_1 + \partial_x h u_1^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = 2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h u_2 + \partial_x h u_2^2 + \frac{\rho}{2} h^2 = -2 u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_1 + \partial_x h u_1 \kappa_1 = 2 \kappa_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t h \kappa_2 + \partial_x h u_2 \kappa_2 = -2 \kappa_{3/2} G_{3/2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \partial_t (gh^2 + hu_1^2 + hu_2^2) + \partial_x(\text{truc}) &= -|G_{3/2}|(u_1 - u_2)^2 \\ \partial_t (hv_1^2 + hv_2^2) + \partial_x(\text{bidule}) &= -|G_{3/2}|(v_1 - v_2)^2 \end{aligned}$$

Centré ou décentré ?

$\bullet_{3/2} = \frac{\bullet_1 + \bullet_2}{2}$
conservation de l'énergie

$\bullet_{3/2} = \begin{cases} \bullet_2 & \text{si } G_{3/2} > 0 \\ \bullet_1 & \text{sinon} \end{cases}$
dissipation de l'énergie

Pas de principe du max dans le cas centré

$$h(x) = 1 + x^2 \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{2g - \frac{g}{2}h(x)^2}{h(x)}} = -u_2(x) \quad G_{3/2}(x) = \frac{gx(4 - 3h(x)^2)}{\sqrt{2h(x)(4 - h(x)^2)}}$$
$$\begin{cases} \partial_t \kappa_1 + u_1 \partial_x \kappa_1 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{h} G_{3/2} \\ \partial_t \kappa_2 - u_1 \partial_x \kappa_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{h} G_{3/2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(h\kappa_1^2\mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + h\kappa_2^2\mathbf{1}_{\kappa_2 < 0}) + \partial_x(\text{bidule}) \\ & = G_{3/2} \left(\kappa_1(2\kappa_{3/2} - \kappa_1)\mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + \kappa_2(\kappa_2 - 2\kappa_{3/2})\mathbf{1}_{\kappa_2 < 0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(h\kappa_1^2 \mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + h\kappa_2^2 \mathbf{1}_{\kappa_2 < 0}) + \partial_x(\text{bidule}) \\ & = G_{3/2} \left(\kappa_1(2\kappa_{3/2} - \kappa_1) \mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + \kappa_2(\kappa_2 - 2\kappa_{3/2}) \mathbf{1}_{\kappa_2 < 0} \right) \end{aligned}$$

Le terme d'échange est toujours dissipatif, par exemple quand $\kappa_1 < 0$,

$$\kappa_2 > 0, \text{ on trouve } = \begin{cases} \kappa_1(2\kappa_2 - \kappa_1) & \text{si } G_{3/2} < 0 \\ \kappa_1^2 & \text{si } G_{3/2} > 0 \end{cases}$$

On en déduit la positivité des traceurs :

$$\int_{\mathbb{R}} (h\kappa_1^2 \mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + h\kappa_2^2 \mathbf{1}_{\kappa_2 < 0})(t, \cdot) \leq (h\kappa_1^2 \mathbf{1}_{\kappa_1 < 0} + h\kappa_2^2 \mathbf{1}_{\kappa_2 < 0})(0, \cdot)$$

Hyperbolicité du modèle bicouche

Le modèle bicouche avec les choix de vitesse d'interface décentré amont, décentré aval et centré sont hyperboliques.

Dans le cas du choix centré, pour les solutions régulières le système est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(h\bar{u}) + \partial_y(h\bar{v}) = 0, \\ \partial_t(h\bar{u}) + \partial_x(h\bar{u}^2 + h\hat{u}^2 + \frac{g}{2}h) = 0, \\ \partial_t\hat{u} + \partial_x(\hat{u}\bar{u}) = 0, \\ \partial_t(h\bar{v}) + \partial_x(h\bar{u}\bar{v} + h\hat{u}\hat{v}) = 0, \\ \partial_t\hat{v} + \hat{u}\partial_x\bar{v} + \bar{u}\partial_x\hat{v} = 0. \end{cases}$$

où $\bar{u} = \frac{u_1+u_2}{2}$, $\hat{u} = \frac{u_2-u_1}{2}$, $\bar{v} = \frac{v_1+v_2}{2}$, $\hat{v} = \frac{v_2-v_1}{2}$. On sait définir le produit non conservatif et résoudre le problème de Riemann.

Hyperbolicité N couches

Pas d'entropie strictement convexe, pas de symétriseur, pas de système de lois de conservation... Même pour le tricouche !

Quel choix pour $u_{k+1/2}$?

On peut souhaiter prendre $u_{k+1/2} = \frac{u_k + u_{k+1}}{2}$ MAIS des simulations numériques montrent que ce n'est pas toujours hyperbolique (pour $N = 5$), y compris pour des cisaillements tendant tous vers 0.

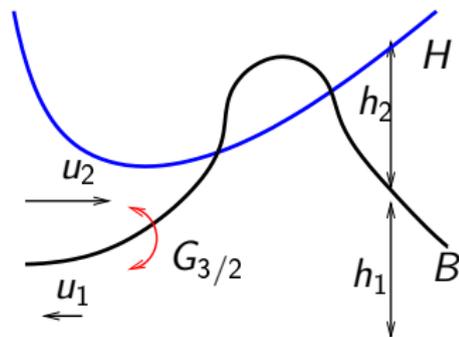
Résultat partiel 1

- Il existe un choix artificiel de vitesses d'interface qui rend le système hyperbolique quand H tend vers $+\infty$.
- Avec le choix de vitesse centré, si $u_1 \neq u_2 = u_3$, le tricouche est un bicouche. Cela reste valable pour $|u_1 - u_2|$ petit et $|u_2 - u_3|$ petit.

Analyse hyperbolique pour le choix décentré ??

Modèle bicouche à interface physique

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \partial_x (h_1 u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t h_2 + \partial_x (h_2 u_2) = -G_{3/2} \\ \partial_t (h_1 u_1) + \partial_x (h_1 u_1^2) + g h_1 \partial_x h = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h = -u_{3/2} G_{3/2} \end{cases}$$



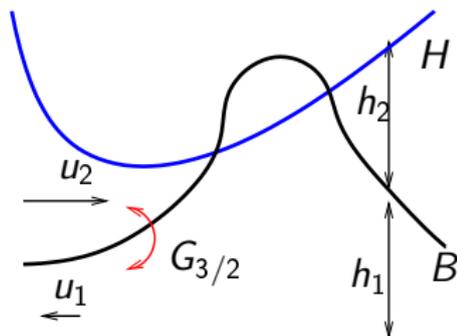
Modèle bicouche à interface physique

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \partial_x (h_1 u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t h_2 + \partial_x (h_2 u_2) = -G_{3/2} \\ \partial_t (h_1 u_1) + \partial_x (h_1 u_1^2) + g h_1 \partial_x h = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h = -u_{3/2} G_{3/2} \end{cases}$$

Si $H > B$:

$$\begin{cases} \partial_x (B u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t H + \partial_x (B u_1 + h_2 u_2) = 0 \\ \partial_t (B u_1) + \partial_x (B u_1^2) + g B \partial_x H = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h = -u_{3/2} G_{3/2} \end{cases}$$

$$\text{Si } H < B : \begin{cases} G_{3/2} = 0 \\ \partial_t H + \partial_x (H u_1) = 0 \\ \partial_t (H u_1) + \partial_x (H u_1^2) + g H \partial_x H = 0 \end{cases}$$

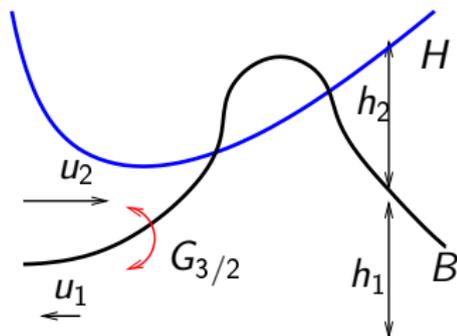


$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \partial_x (h_1 u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t h_2 + \partial_x (h_2 u_2) = -G_{3/2} \\ \partial_t (h_1 u_1) + \partial_x (h_1 u_1^2) + g h_1 \partial_x h = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h = -u_{3/2} G_{3/2} \end{cases}$$

Si $H > B$:

$$\begin{cases} \partial_x (B u_1) = G_{3/2} \\ \partial_t H + \partial_x (B u_1 + h_2 u_2) = 0 \\ \partial_t (B u_1) + \partial_x (B u_1^2) + g B \partial_x H = u_{3/2} G_{3/2} \\ \partial_t (h_2 u_2) + \partial_x (h_2 u_2^2) + g h_2 \partial_x h = -u_{3/2} G_{3/2} \end{cases}$$

$$\text{Si } H < B : \begin{cases} G_{3/2} = 0 \\ \partial_t H + \partial_x (H u_1) = 0 \\ \partial_t (H u_1) + \partial_x (H u_1^2) + g H \partial_x H = 0 \end{cases}$$



Thèse de Nelly
Makary

Prise en compte d'une
physique différente dans
la couche du bas.
Exemple : limite forte
friction.

Merci !

Merci !

Et à bientôt ?

